

放射熱伝達の解析(第1報) : 内部発熱, 対流熱伝達と共存する場合の解析

その他(別言語等)のタイトル	Analysis of Radiative Heat Transfer (1st Report) : In case of compound heat transfer with radiation, convection and internal heat source
著者	媚山 政良
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	9
号	3
ページ	735-755
発行年	1978-11-20
URL	http://hdl.handle.net/10258/3687

放射熱伝達の解析 (第1報, 内部発熱, 対流熱伝達と共存する場合の解析)

媚 山 政 良

Analysis of Radiative Heat Transfer (1st Report, In case of compound heat transfer with radiation, convection and internal heat source)

Masayoshi Kobiyama

Abstract

The energy equations of compound heat transfer with radiation and convection are non-linear integro-differential type which is not easy for analysis. In this report, one of the numerical methods is introduced under the condition of uniform radiative properties with Monte Carlo Method in order to make the analysis possible and easy. The analytical results of this compound heat transfer with internal heat source prove that the effects of radiative absorption coefficient and quantity of internal heat source have influence on heat transfer characteristics.

1. 緒 言

放射熱伝達が系の伝熱特性を支配する, ないしは放射熱伝達の考慮を払わずには系の定性的な傾向を説明しえない伝熱系は工学の分野のみならず身近かな生活環境にも多くある。放射は他の伝熱形態とは異なる特有の機構を持ち, その現象は複雑である。このため, 放射熱伝達現象を簡略化し解析する方法が数多く提案され, 工学的にその妥当性が確認されるに至り¹⁾, 熱伝達量計算の数式化は比較的容易に行ない得るようになってきている。しかし, 現象を簡略化しても, 系を支配する積分方程式(対流(伝導)を同時に考え合わせる共存熱伝達問題では温度に関し非線型の微積分方程式となる)の解法は一般に煩雑であり, 多くの伝熱系に適応でき, 精度を保ち効率良く解く方法を導くことが工学的に重要な研究課題となっている。

本報では, 伝熱系の形状, 放射物性等の変化に柔軟性のある適応が可能な Monte Carlo 法²⁾, ³⁾により放射熱伝達の解析を行ない, 同法がある条件下のもとでは確率計算個有の誤差を減じ得, その利用が容易であり, 数値解析に必要とする演算時間の短縮が可能であることを示す。また, 平行平板間流路内を内部発熱を伴う放射性流体が流動する場合の熱伝達の解析を行ない, その特性を明らかにする。

記 号

A : 面積 m^2	γ : 比重量 kg/m^3
C_p : 定圧比熱 $\text{kcal}/\text{kg}^\circ\text{K}$	δ : 誤差
E : 放射能 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}$	ζ : 方位角 rad
F : ガスの吸収を考慮した形態係数	η : 天頂角 rad
l : 微小要素間空間距離 m	Θ : 無次元温度
N : 放射束数 本	θ : 無次元温度
N_R : 伝導-放射パラメータ	κ : 放射吸収係数 $1/\text{m}$
N_{ux} : 局所ヌッセルト数	λ : 熱伝導率 $\text{kcal}/\text{mh}^\circ\text{K}$
P : 位置	σ : ステファン-ボルツマン定数 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}^\circ\text{K}^4$
Pr : プラントル数	τ : 光学距離
q_{in} : 内部発熱量 $\text{kcal}/\text{m}^3\text{h}$	ϕ : 壁の法線を微小要素の方向とのなす角 rad
q_R : 放射熱流束 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}$	
q_x : 壁面熱負荷 $\text{kcal}/\text{m}^2\text{h}$	
R : $0 \leq R < 1$ の一様乱数	下添字
Re : レイノルズ数	m : 平均値
s : $x-y$ 平面上の微小要素間距離 m	w : 壁面
T : 温度 $^\circ\text{K}$	g : 流体
t : 温度 $^\circ\text{C}$	gg, gw, wg, ww : 微小要素の相対位置
u : 速度 m/h	上添字
X : グレーツ数	I : 一次元
x : 流れ方向の座標	II : 二次元
y : 流れに直角方向の座標	

2. 伝熱系および基礎方程式

2.1 伝 熱 系

伝熱系を図1に示す。本モデルは z 方向に無限幅で、 x 方向すなわち流れ方向に半無限長の平行平板間を内部発熱 ($x=0$ にて発熱を開始する) を伴う放射性流体が発達した層流状態で流れる場合である。その他の系の設定条件をつぎと置く。

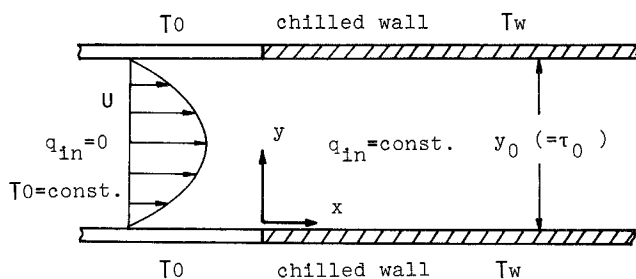


図1 伝熱系

- 1) 流体は波長特性を有しない灰色放射性流体とする。
- 2) 壁面は等温の黒体乱射出面とする。
- 3) 単位体積あたりの内部発熱量を一定とする。
- 4) 物性値は一定とし、流体に働く浮力などの体積力は考慮しない。
- 5) 流れおよび熱伝達はともに定常状態にあるものとする。

2. 2 基礎方程式 (付録 1 参照)

速度分布は次式とする。

$$u = 6u_m \left\{ \left(\frac{y}{y_0} \right) - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

流体および壁面に対するエネルギー式を次式とする。

$$\rho u c_p \frac{\partial T_g}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial y^2} \right) - \text{div } q_{Rg} + q_{in} \quad (2)$$

$$q_{x1} = -\lambda \left(\frac{\partial T_g}{\partial y} \right)_{y=0} - q_{Rw1} \quad (3)$$

ただし、 q_{Rg} 、 q_{Rw} はおのおの流体、壁面における放射熱流束であり、図1 に示す二次元温度場に対しては次式として与えられる。

$$\begin{aligned} -\text{div } q_{Rg} = & -4\kappa E_g + \kappa \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{y_0} 4\kappa E_g \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz \right\} dy dx \right. \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} E_{w1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz \right\} dx \\ & \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} E_{w2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_2}}{\pi l_{w2}^2} \cos \phi_2 dz \right\} dx \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -q_{Rw1} = & -E_{w1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{y_0} 4\kappa E_g \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{4\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz \right\} dy dx \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} E_{w2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_2}}{\pi l_{w12}^2} \cos^2 \phi_{12} dz \right\} dx \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 l は着目する二要素間の空間距離である。

ここで、次式による置換えを行ない、 F を「ガスの吸収を考慮した形態係数⁴⁾」とよぶ。

$$\left. \begin{aligned} F_{gg}^{\text{II}}(\kappa S) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz \right\} \kappa dx dy \\ F_{wg}^{\text{II}}(\kappa S_{w1}) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz \right\} \kappa dx dy \\ F_{gw}^{\text{II}}(\kappa S_{w1}) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{4\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz \right\} dx \\ F_{ww}^{\text{II}}(\kappa S_{w12}) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_2}}{\pi l_{w12}^2} \cos^2 \phi_{12} dz \right\} dx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし, s は着目する二要素間の平面 ($x-y$ 平面) 上の距離である。

また, $F^I = \int_{-\infty}^{+\infty} (F^{II}/dx) dx$ として, つぎの置換えを行なう。

$$\left. \begin{aligned} F_{gg}^I(\kappa y) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz dx \right\} \kappa dy \\ F_{wg}^I(\kappa y_{w1}) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz dx \right\} \kappa dy \\ F_{gw}^I(\kappa y_{w1}) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{4\pi l_{w1}^2} \cos \phi_1 dz dx \right\} \\ F_{ww}^I(\kappa y_0) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l w_1}}{\pi l_{w12}^2} \cos^2 \phi_{12} dz dx \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以下, F^I, F^{II} をおのおの「一次元」, 「二次元」と冠しよふ。 F^{II} および F^I は, 数式上, Einstein の定議した関数 $F_n^{(5)}$ および指数積分関数 E_n とつぎの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} F_{gg}^{II}(\tau) &= \frac{\kappa dx dy}{2\pi l} F_1(\tau) \\ F_{gw}^{II}(\tau) &= \frac{y dx}{2\pi l_{w1}^2} F_2(\tau) \\ F_{wg}^{II}(\tau) &= \frac{2\kappa y dx dy}{\pi l_w^2} F_2(\tau) \\ F_{ww}^{II}(\tau) &= \frac{2y_0^2 dx}{\pi l_s^3} F_3(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし, τ は κs を表し (二要素間の平面上の光学距離), $F_n(\tau)$ は次式をもって示される。

$$F_n(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau/\cos \phi} (\cos \phi)^{n-1} d\phi \quad (n=1,2,3) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{gg}^I(\tau) &= \kappa dy E_1(\tau)/2 \\ F_{wg}^I(\tau) &= 2\kappa dy E_2(\tau) \\ F_{gw}^I(\tau) &= E_2(\tau)/2 \\ F_{ww}^I(\tau_0) &= 2E_3(\tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし, τ は κy を, τ_0 は κy_0 (二平面間の光学距離) を表し, $E_n(\tau)$ は次式をもって示される。

$$E_n(\tau) = \int_0^1 \mu^{n-2} e^{-(\tau/\mu)} d\mu, \mu = \cos \theta \quad (n=1,2,3) \quad (11)$$

なお, 境界条件は後述する。

3. 解 析 法

前章において、基礎方程式を導入し、形態係数を定義したが、対流を同時に考慮することにより方程式は温度に対し非線型となり、また、内部発熱を同時に考慮することにより取扱いえる現象は多岐に渡る。このため、基礎式を無次元表示することは必ずしもその理解を容易とし、一般化を図り、解析を容易とするとは限らない。したがって、ここでは上述した諸式を直接取扱い、のちに解析条件および結果の表示に必要な無次元数および無次元式を示す。

3. 1 放射熱伝達の解析法

後述するいくつかの問題を解消するため、ここでは放射熱伝達量の計算に Monte Carlo 法を用いる。図1および基礎式に示す伝熱系に対し、最も有効であると考えられる方法—EFD法 (Exchange Factor Distribution Method)—を導入 (他の系に対し有効な方法は後述ないしは付録3に示す) し用いる。

3. 1. 1 ガスの吸収を考慮した形態係数 F の定義 数値解析上、式(6)で示した F^{II} を図2に示す座標系に対し定義する。図2の座標系につぎの条件を置く。

- $$\left. \begin{array}{l} 1) \kappa_o = \kappa_a \equiv \kappa = \text{一定} \\ 2) \Delta x_o = \Delta x_a = \Delta x_b \equiv \Delta x = \text{一定} \\ \quad \Delta y_o = \Delta y_a = \Delta y_b \equiv \Delta y = \text{一定} \\ 3) \text{微小要素中の流体ないしは壁面は一様温度である。} \end{array} \right\} \quad (12)$$

上記の条件から式(6)はつぎと書かれる。

$$\left. \begin{aligned} F_{gg}^{\text{II}}(\kappa, |x_o - x_a|, |y_o - y_a|) \\ &= \kappa \int_{x_o}^{x_o + \Delta x} \int_{y_o}^{y_o + \Delta y} \left\{ \int_{x_a}^{x_a + \Delta x_a} \int_{y_a}^{y_a + \Delta y_a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz_a dy_a dz_a \right\} dy_o dx_o / \\ &\quad \int_{x_o}^{x_o + \Delta x_o} \int_{y_o}^{y_o + \Delta y_o} dy_o dx_o = \kappa \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz \right\} \Delta y \Delta x \\ F_{wg}^{\text{II}}(\kappa, |x_o - x_b|, |y_o - y_b|) &= \kappa \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} \cos \phi dz \right\} \Delta y \Delta x \\ F_{gw}^{\text{II}}(\kappa, |x_o - x_a|, |y_o - y_a|) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} \cos \phi \right\} \Delta x \\ F_{ww}^{\text{II}}(\kappa, |x_o - x_b|, |y_o - y_a|) &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} \cos^2 \phi \right\} \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

この F は図2に示す位置 o に対する a ないしは b からの放射熱伝達量の割合を示し、また、放射熱射出要素と受熱要素の相対的な光学位置関係のみにより決まる値なので、ガスの吸収を考慮した形態係数とみなすことができる。

一方、 F^{II} は加法的であることから、数値解析上、より小さな κ , Δx , Δy に対し F^{II} を求めて

おき、これらの値が大きな場合に適用することができるとともに、一次元の形態係数を次式により容易に求めることができる。(式(7)参照)

$$F^I(j) = F^II(1, j) + 2 \sum_{i=2}^{\infty} F^II(i, j) = F^II(1, j) + 2 \sum_{i=2}^m F^II(i, j) \quad (14)$$

ただし、図2において $(i, j) = (1, 1)$ を射出要素とし、要素 j の形態係数を $F^I(j)$ としている。

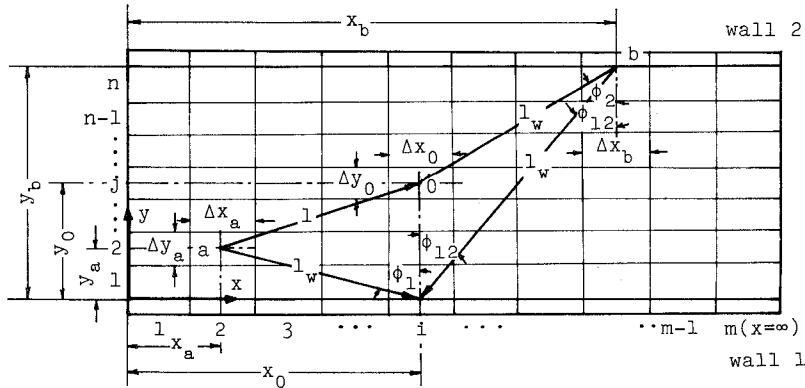


図2 数値解析における座標系

3. 1. 2 ガスの吸収を考慮した形態係数 F の計算

a) 放射束射出位置 図3に示す放射熱射出要素から放射束を一様に射出する。要素内の放射束射出位置 $P_1(x_1, y_1)$ は次式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} R_x &= (x_1 - x_i) / \Delta x \\ R_y &= (y_1 - y_j) / \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 R_x, R_y は $0 \leq R < 1$ の一様乱数である。

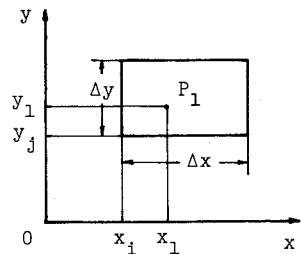


図3 放射束射出位置

b) 放射束の吸収距離および射出方向 放射束が吸収される距離 l (吸収距離とよび、概念的には射出された一本の放射束は途中で吸収されず距離 l において全量吸収されるとみなす)、天頂角方向 η 、方向角方向 ζ に射出されるおのおのの確率 R_l, R_η, R_ζ はつぎとなる。(すなわち、一本の放射束が吸収される位置は、 $R_x, R_y, R_l, R_\eta, R_\zeta$ の5つの一様乱数により規定される。付録2参照)

$$\left. \begin{aligned} R_l &= 1 - e^{-\kappa l} \\ R_\eta &= (1 - \cos \eta) / 2 \\ R_\zeta &= \zeta / 2\pi \end{aligned} \right\} \text{流体} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} R_\eta &= 1 - \cos^2 \eta \\ R_\zeta &= \zeta / 2\pi \end{aligned} \right\} \text{壁面}$$

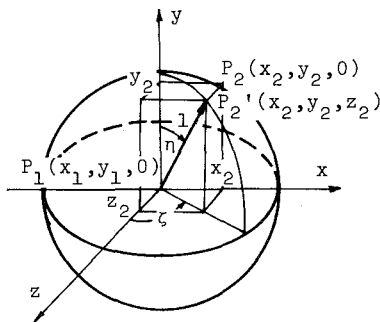


図4 放射束の座標系

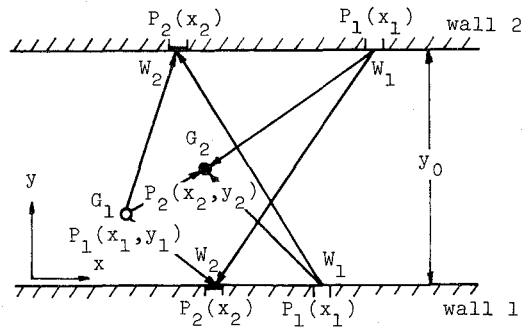


図5 放射束射出および吸収位置

表-1 放射束の吸収位置

$P_2(x_2, y_2) = P_2(l \sin \eta \sin \varphi + x_1, a_R l \cos \eta + b_R)$			
方	向	a_R	b_R
$G_1 \rightarrow G_2, G_2 \rightarrow G_1$		1	y_1
$W_1 \rightarrow G_2$		1	0
$W_2 \rightarrow G_2$		-1	y_0
$P_2(x_2) = C_R \tan \eta \sin \varphi + x_1$			
方	向	C_R	
$G_1 \rightarrow W_2$		$y_0 - y_1$	
$G_1 \rightarrow W_1$		$-y_1$	
$W_1 \rightarrow W_2, W_2 \rightarrow W_1$		y_0	

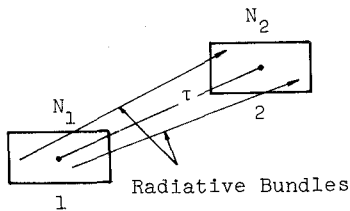


図6 放射束射出, 吸収要素

c) 放射束の吸収位置 空間の点を直交座標系 $P(x, y, z)$ をもって示すものとする。式(16)は図4に示すような球面座標系 $P(l, \eta, \xi)$ を用い与えられるので、これを P に変換すると放射束射出位置 $P_1(x_1, y_1, 0)$ に対応した $P'_2(x_2, y_2, z_2)$ が得られる。式(6)に示される z 方向の積分を施すため、 z_2 を $x-y$ 平面に正投影した点 $P_2(x_2, y_2, 0)$ にこの放射束が吸収されるものとする。

放射束が射出される位置と吸収される位置を二次元 $x-y$ 平面上に示すと図5のような場合があり、図4に示す位置関係から、吸収位置 P_2 は表1のごとく求められる。

d) 二次元形態係数 図6に示す放射束数 N_1 をもつ射出要素1からみて、重心間光学距離 τ_{12} に位置する要素2(要素1から射出される放射束中、ここで N_2 受けるものとする)の二次元形態係数 $F_{1,2}^n(\tau_{1,2})$ は上記諸式の結果より次式により求められる。

$$F_{1,2}^n(\tau_{1,2}) = N_2/N_1 \quad (17)$$

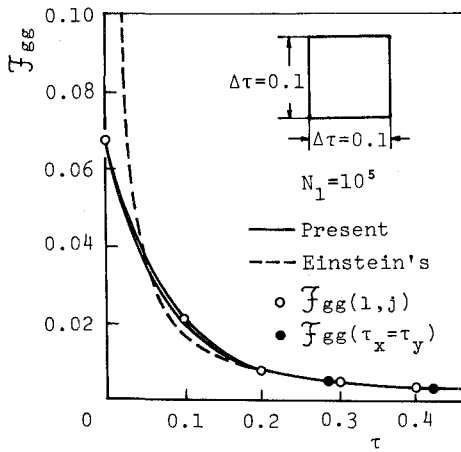


図7(a) 二次元形態係数(正方形要素)

結果の例を図7および図8に示す。同図には式(9)に示す, Einsteinによる F^{II} を併記してある。図7は $\Delta x = \Delta y$ の場合であり, 同図(a)よりEinsteinによる F_{gg}^{II} は $\tau = 0$ において発散(式(8)は $\tau = 0$ で特異点をもつ)し, 実際の計算に用いることはできない。また, 本報で取扱う伝熱系は流れ方向が, 二平面間距離よりもはるかに長く, 図8中に示す形状の微小要素の形状を採り数値解析を行なうのが普通であるが, Einsteinによる要素代表点間の熱伝達と考える方法では, 微小要素の形状の変化を正しく表現できないことがわかる。

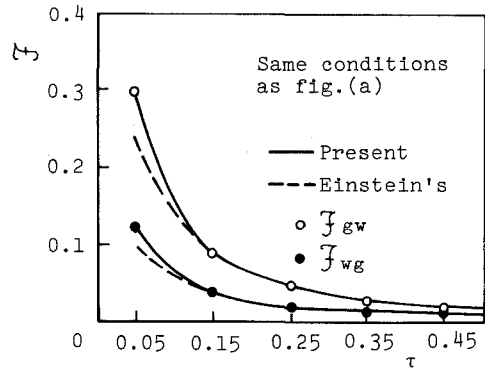


図7(b)

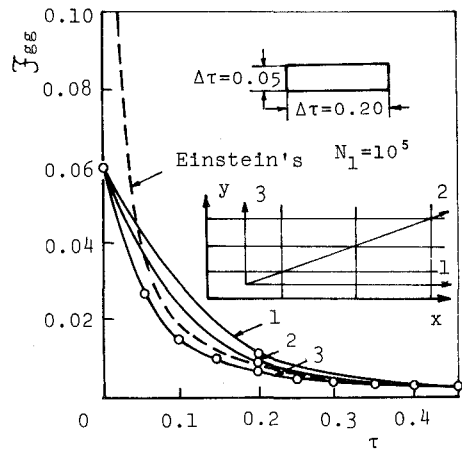


図8 二次元形態係数(長方形要素)

e) 一次元形態係数 上述の F^{II} を式(14)へ代入し求めた一次元形態係数を図9に示す。二平面間の光学距離 τ_0 が小さい場合および F^{I} の値が小さい領域においては確率計算個有のばらつきを有しているが, 式(17)から明らかなようにつぎの関係が成立すること

$$(\sum F_{gg} + \sum F_{gw})_P = 1, (\sum F_{wg} + \sum F_{ww})_P = 1 \quad (18)$$

を考慮し, 図9に併記した各値の修正値(曲線)を実際の演算に用いると現象の近似ないしは計算個有の誤差内に納まり, 工学的に要求される精度の範囲で安定した放射熱伝達の数値解析を行なうことができる。

f) 形態係数の精度 確率による手法を用い数値解析を行なうと, その計算精度は中心極限定理により評価される。真値との誤差 δ は着目する要素が受ける放射束数を N_0 とすると, 同

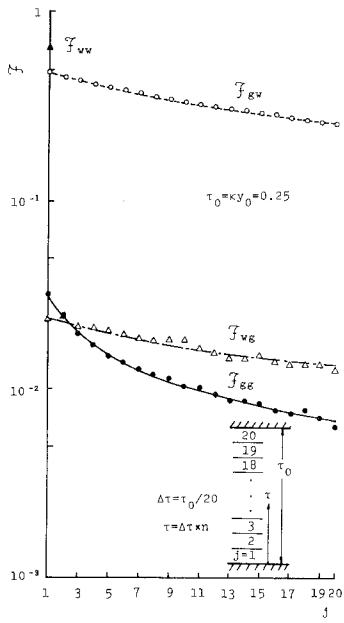


図 9(a) 一次元形態係数

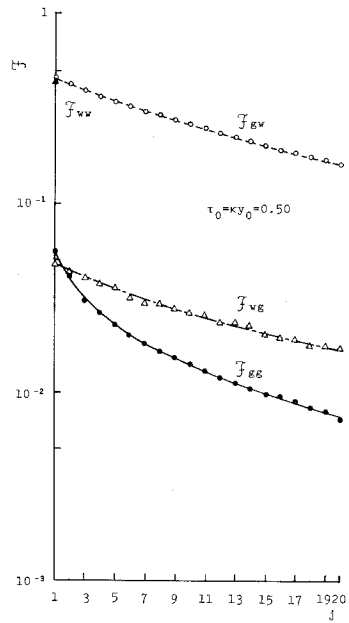


図 9(b)

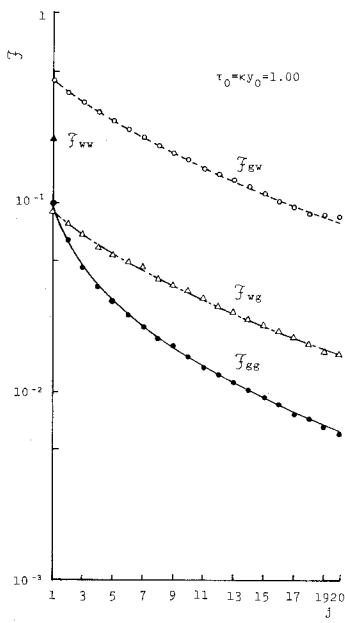


図 9(c)

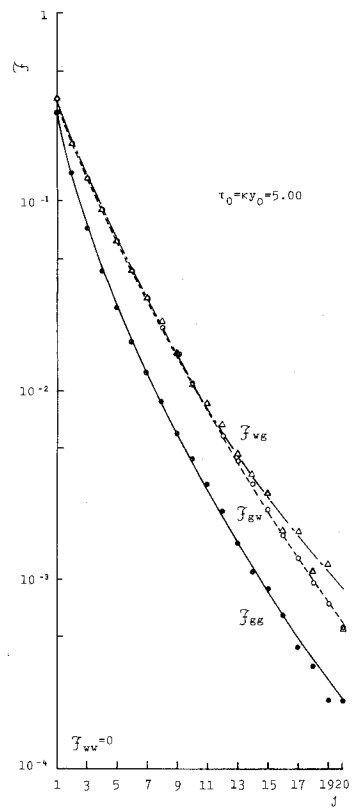


図 9(d)

定理より次式で表わされる。

$$\delta \propto 1/\sqrt{N_0} \quad (19)$$

一方、 N_0 は他の要素で射出される放射束数に比例する。ここで用いた EFD 法では、単一放射束射出要素から受ける放射束数として、式(17)を定義するため、全放射束数を N_t とすると、真値との誤差 δ_{EFD} は次式となる。

$$\delta_{EFD} \propto 1/\sqrt{N_t} \quad (20)$$

これに対し、一般的な Monte Carlo 法では、全要素を放射束射出要素とし、各要素に N_t を振り分けるため、要素の数が $(n \times m)$ であるとき、単一要素から射出される放射束数は平均 $N_t/(n \times m)$ となり、真値との誤差 δ_N はつぎとなる。

$$\delta_N \propto 1/\sqrt{\frac{N_t}{n \times m}} \quad (21)$$

また、 δ_N と δ_{EFD} の比をとると次式となり、EFD 法による F は一般的な Monte Carlo 法によるよりも、精度の高いことがわかる。

$$\delta_{EFD}/\delta_N = 1/\sqrt{n \times m} \quad (22)$$

g) 形態形数の利用 EFD 法は放射熱伝達量の計算に先立ち、ガスの吸収を考慮した形態係数を一度だけ計算しておき、その値を用い、各要素のもつ放射エネルギーを配分することにより放射熱伝達量が計算される。すなわち、式(6)ないしは式(7)に示す形態係数の定義より、図5の要素 P_1 (放射エネルギー $Q_{R1} = 4 \kappa E_g dA$ ないしは $= E_w dx$) から要素 P_2 への放射熱伝達量 Q_{12} は次式により求められる。

$$Q_{12} = Q_{R1} \times F \quad (23)$$

この放射エネルギーの分配を全要素に対し行なうと、式(4)および式(5)の $-\text{div} q_R + 4\kappa E_g$ および $-q_{Rw} + E_w$ が計算される。

これらの手順を踏むことにより、Monte Carlo 法個有の演算時間を長く必要とする欠点を克服し、また、演算上の手続きも簡略化される。

h) ある条件下における Monte Carlo 法の適用 伝熱系の形状、放射物性等の変化に柔軟性

表-2 Monte Carlo 法の適用範囲

名 称	適 用 範 囲		
	モデルの形状	放射吸収係数	温度に関する境界条件
N 法	制 限 な し	制 限 な し	制 限 な し
DPE 法	制 限 な し	位置の関数として与えられる場合	制 限 な し
EFD 法	同一の形状、大きさの微小要素に分割できる場合	一 定 の 場 合	制 限 な し
EBN 法	制 限 な し	制 限 な し	設 定 値 の 場 合

のある適応が可能な Monte Carlo 法は、反面、確率計算個有の誤差を内在し、また、それに伴ない数値解析上の安定性も良好とはいえず、この欠点を克服するためには膨大な演算時間を必要とする。このため、適用範囲にある条件を置き、この短所を改善するいくつかの方法を導入した。これらの方法の適用範囲を表 2 に示し、付録 3 において詳述する。これらの方法その特徴を生かし用いることにより、Monte Carlo 法を効率良く利用でき、広い範囲の事象を説明することができる。

3. 2 放射・対流共存熱伝達の解析法

基礎方程式の対流熱伝達に関する微分項の数値解析には差分法を用いる。式 (2) の放射熱伝達に関する項をつぎのように書き換える。

$$Q_{R,g} = -\text{div} q_{R,g} + 4\kappa E_g \quad (24)$$

図 10 に示すように着目する微小要素の幾何学的重心を P とし、これに隣接する要素 (演算領域全域に渡り同一形状、寸法とする) に N, S, W と名付ける。式 (2) を差分近似すると次式を得る。

$$ruc_p \frac{T_P - T_W}{\Delta x} = \lambda \frac{T_N - 2T_P - T_S}{\Delta y^2} - 4\kappa \sigma T_P^4 + Q_{R,g,P} + q_{in} \quad (25)$$

放射熱伝達を二次元的に取扱うと、進行形の問題として数値解析を行なうことができず、反復計算法に依るものとし、式 (25) に陽的差分を取入れ、つぎの第 n 次近似式を求めることとする。(放射熱伝達を一次元的に取扱うと、進行形の問題となるが、非線型要素の介在により反復計算法を必要とし、ここでのべる方法はそのまま適応される。)

$$ruc_p \frac{T_P^n - T_W^n}{\Delta y^2} = \lambda \frac{T_N^{n-1} - 2T_P^n + T_S^n}{\Delta y^2} - 4\kappa \sigma (T_P^n)^4 + Q_{R,g,P}^{n-1} + q_{in} \quad (26)$$

ただし、n は反復回数である。式 (26) を T_P^n についてまとめるとつぎの 4 次方程式を得、題意に適合する正の実根を P における温度 T_P^n とする。

$$4\kappa \sigma (T_P^n)^4 + \left(\frac{ruc_p}{\Delta x} + \frac{2\lambda}{\Delta y^2} \right) T_P^n - \left[\frac{ruc_p}{\Delta x} T_W^n + \frac{\lambda}{\Delta y^2} (T_S^n + T_N^{n-1}) + Q_{R,g,P}^{n-1} + q_{in} \right] = 0 \quad (27)$$

壁面に対しても流体におけると同様の差分近似を用いる。式 (3) の放射熱伝達に関する項を次式とおく。

$$Q_{R,w1} = -q_{R,w1} + E_{w1} \quad (28)$$

図 11 に示す壁面およびその近傍の微小要素を用い、差分近似を行なうと、式 (3) の差分式はつぎとなる。

$$q_{x1} = \lambda \frac{T_N - T_P}{(\Delta y/2)} - \sigma T_{w1,P}^4 + Q_{R,w1,P} \quad (29)$$

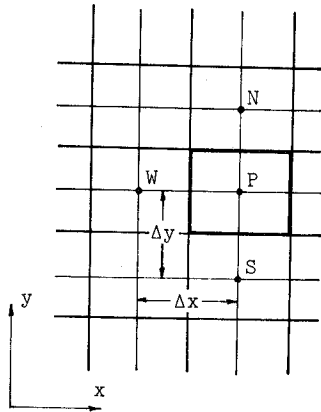


図 10 要素の相対位置 (流体)

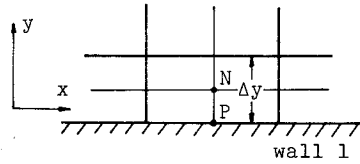


図 11 要素の相対位置 (壁面一流体)

第 n 次近似式はつぎとなる。

$$q_{x1}^n = \lambda \frac{T_N^{n-1} - T_{w1,P}^n}{(\Delta y/2)} - \sigma (T_{w1,P}^n)^4 + Q_{Rw1,P}^{n-1} \quad (30)$$

壁が等温であれば式 (30) よりその熱負荷 q_{x1}^n が求められる。等熱流束壁の場合には、壁温 $T_{w1,P}^n$ はつぎの 4 次方程式の解として求められる。

$$\sigma (T_{w1,P}^n)^4 + \frac{\lambda}{(\Delta y/2)} T_{w1,P}^n - \left[\frac{\lambda}{(\Delta y/2)} T_N^{n-1} + Q_{Rw1,P}^{n-1} - q_{x1}^n \right] = 0 \quad (31)$$

4. 解析例とその検討

工業分野において内部発熱を伴う放射-対流共存熱伝達系は火炉に例をみられるように多くある。火炉の内部発熱量 q_{in} (熱発生率) は $10^4 \sim 10^6 \text{ kcal/m}^2\text{h}$ 程度であり、作動流体の放射吸収係数 κ は $0.25 \sim 1.0 \text{ 1/m}$ 程度である。しかし、一般に火炉のような伝熱系を考えると、系の最高、最低温度差は大きく、また、内部発熱は Arrhenius の反応速度則にみられるように温度および化学種の濃度分布により変化し、必ずしも発熱量が一定であるという条件は成立しない。したがって、本報の条件下での解析結果は系の定性的な傾向を示すにすぎない。この事実を踏まえ、放射熱伝達の取扱いも簡略化する。すなわち、放射熱流束 q_R がつぎの条件を満たすとし、前述の一次元形態係数 F^I を用い数値解析を行なう。

$$\frac{\partial q_{R,y}}{\partial y} \gg \frac{\partial q_{R,x}}{\partial x} \quad (32)$$

4. 1 設定条件および境界条件

伝熱系の設定条件および境界条件を与えるため、つぎの無次元数を用い、式 (12) の条件下で式 (2) および式 (3) を整理すると式 (34), (35) を得る。

$$\left. \begin{aligned} U &= u/u_m, Re = u_m y_o / \nu, Pr = \gamma C_p \nu / \lambda, \theta = T/T_w, \tau_y = \kappa y, \tau_o = \kappa y_o, \\ Y &= y/y_o, X = (x/y_o)/(Re Pr), N_R = \lambda \kappa / (4\sigma T_w^3), \\ Q_{in} &= q_{in} y_o^2 / (\lambda T_w), N_{ux} = q_x y_o / \lambda (T_w - T_m) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - \frac{\tau_o^2}{N_R} \left\{ \theta^4 - \int_0^{\tau_o} \theta^4 F_{gs}^l(\tau_y) d\tau_y - \frac{1}{4} [F_{wg}^l(\tau_y, w_1) + F_{wg}^l(\tau_y, w_2)] \right\} + Q_{in} \quad (34)$$

$$N_{ux1} = -\frac{1}{(1-\theta_m)} \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} - \frac{\tau_o}{N_R} \left\{ \int_0^{\tau_o} \theta^4 F_{gw}^l(\tau_y, w_1) d\tau_y - \frac{1}{4} [1 - F_{ww}^l(\tau_o)] \right\} \right\} \quad (35)$$

ただし、壁は等温の受熱壁で $T_{w1} = T_{w2} \equiv T_w$ としている。

したがって、系の独立変数はグレイツ数 X および y 方向の無次元距離 Y であり、設定条件は二平面間の光厚距離 τ_o 、伝導-放射パラメータ N_R 、無次元内部発熱量 Q_{in} をもって示されることがわかる。また、解析結果としては、無次元温度 θ および局所ヌッセルト数 N_{ux} が得られる。しかし、温度分布に関しては、内部発熱を伴う本伝熱系ではつぎに示す T_{ad} (断熱火炎温度に類似する) を用い無次元表示 Θ を用いる方が結果の理解は容易となる。

$$\left. \begin{aligned} T_{ad} &= \frac{q_{in} x}{\gamma u_m C_p} + T_o \\ \Theta &= (T_g - T_o) / (T_{ad} - T_o) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし、 T_o は $X \leq 0$ における流体および壁の温度である。

τ_o, N_R, q_{in} および Θ を表わすには、 $\lambda, \kappa, T_o, T_w, y_o, q_{in}$ の値が必要となる。前述の理由により、これらの値を無次元数としてではなく与える。各計算例に共通な値として、 $\tau_o, \tau_w, y_o, \lambda$ を表3に示す値とする。また、 κ, q_{in} は変数として取扱う。なお、 X を表示するのに必要な Pe_R を表3に併記する。

表-3 設定値

境界条件を改めてまとめるとつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} x=0 &: T_g = T_o \\ x < 0 &: q_{in} = 0 \\ y=0, y_o &: T_g = T_w \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$t_o = 15^\circ\text{C}$	$\lambda = 0.05 \text{ kcal/mk}^\circ\text{K}$
$t_w = 100^\circ\text{C}$	$Re Pr = 2000$
$y_o = 1.0 \text{ m}$	

4. 2 解析結果と検討

4. 2. 1 放射吸収係数を変化させた場合 内部発熱量 $q_{in} = 10^5 \text{ kcal/m}^3\text{h}$ とし、作動流体の放射吸収係数 κ を変化させた場合の y 方向の温度分布 Θ を図12に、流路中央部 ($y = y_o/2$) の温度 $\Theta_{y_o/2}$ および y 方向断面の混合平均温度 Θ_m を x 方向に対し図13に、局所ヌッセルト数 N_{ux} を図14に示す。この条件では q_{in} を一定としているため、ある X において T_{ad} は κ に

よらず一定となる。

a) 温度分布 放射吸収係数 κ が大きくなると流体温度は全体的に低くなり、また、Y方向の温度分布は平坦化する。とくにその傾向は壁面（冷却面）に近い領域において顕著となっている。なお、放射熱伝達のない（ $\tau_0 = 0$ ）場合には、系は内部発熱と対流により支配され、エンタルピ輸送の大きな流路中央部で加熱開始前の影響を受け温度が低下している。

この結果からつぎの事が明らかとなる。すなわち、熱流体の保温、輸送面から考えると、壁面の放射物性にかかわらず流体を放射性化しないことが必要であり、作動流体の温度の均一化には流体を放射性化をすることが有効であると考えられる。さらに、作動流体の温度の均一化および保温（内燃機関ではこの条件が要求される）のためには、流体の放射性化を施す（作動流体の放射吸収係数を大とするか、幾何学的寸法を大とする）とともに、壁面の反射率を上げる必要のあることがわかる。一方、作動流体から壁への熱伝達量を多くし、流体温度の均一化（外燃機関ではこの条件が要求される）を図るためには、壁面の放射率を高め、流体の放射性化を推進すれば良いことがわかる。

b) 熱伝達 放射熱伝達の考慮の有無により、 Nux 分布は傾向を異にしている。また、 τ_0 が大きくなるにつれ、 Nux は本計算範囲内ではほぼ同一の値を示す。すなわち、内部発熱があり、

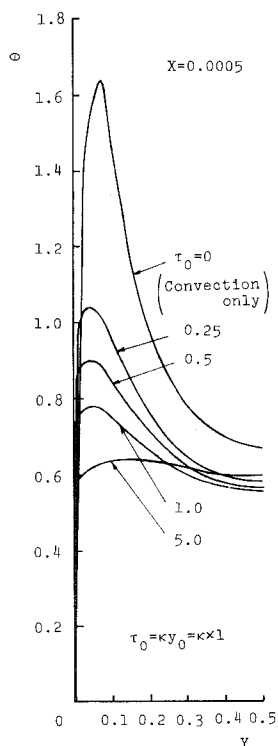


図 12(a) Y 方向温度分布 ($q_{in} = 10^5 \text{ kcal/m}^3\text{h}$)

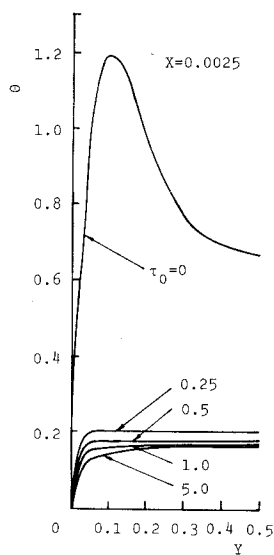


図 12(b)

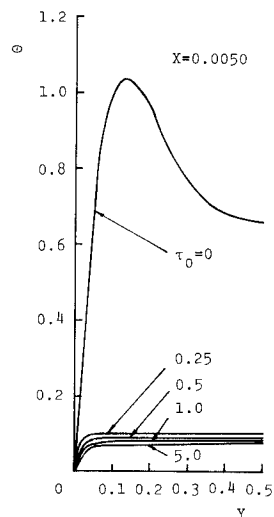


図 12(c)

光学距離が小さい領域、たとえば気体燃料の燃焼時や小型の内燃機関の稼動時には系の放射吸収係数を正確に把握して、熱計算を行なう必要のあることがわかる。

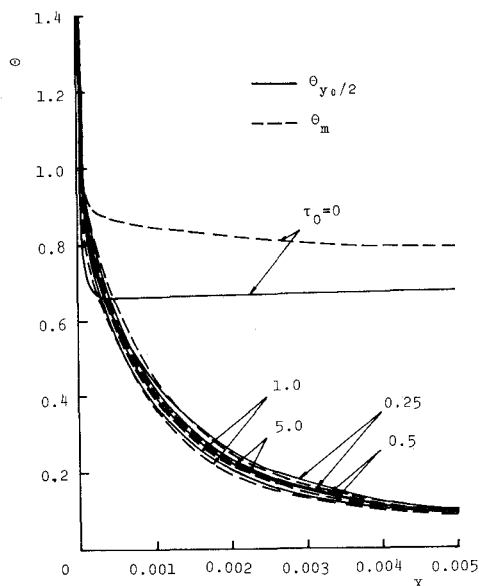


図 13 流路中央および混合平均温度
($q_{in}=10^5 \text{ kcal/m}^3\text{h}$)

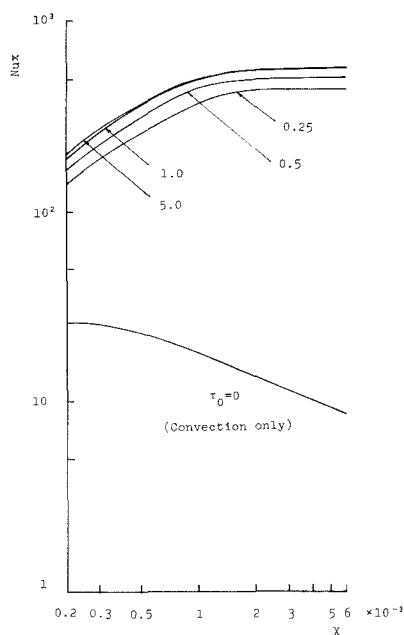


図 14 局所ヌッセル数 ($q_{in}=10^5 \text{ kcal/m}^3\text{h}$)

4.2.2 内部発熱量を変化させた場合 放射吸収係数 $\kappa=1.0 \text{ 1/m}$ ($\tau_0=1$) とし、内部発熱量を変化させた場合の Y 方向の温度分布を図 15 に、流路中央部 ($y=y_0/2$) の温度 $\Theta_{y_0/2}$ および Y 方向断面の混合平均温度 Θ_m を X 方向に対し図 16 に、局所ヌッセル数を図 17 に示す。この条件では q_{in} を変化させているため、ある X において同一の Θ が同一の流体温度 T_g を示しているわけではない。

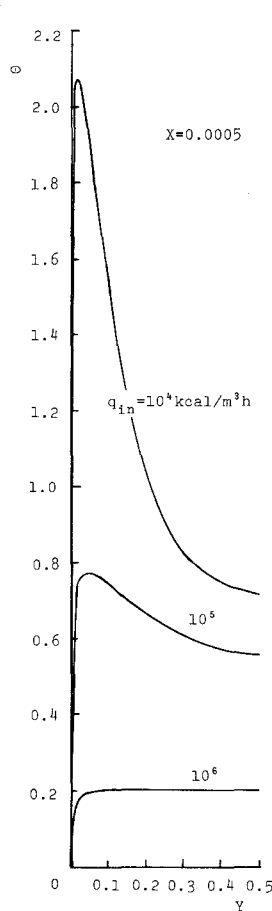


図 15(a) Y 方向温度分布
($\tau_0=1.0$)

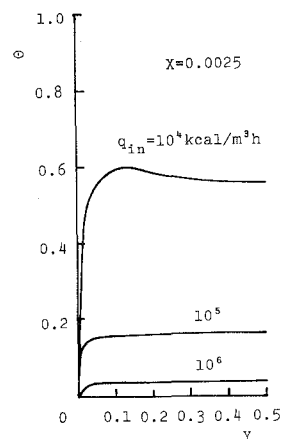


図 15(b)

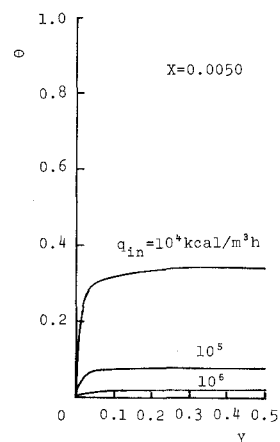


図 15(c)

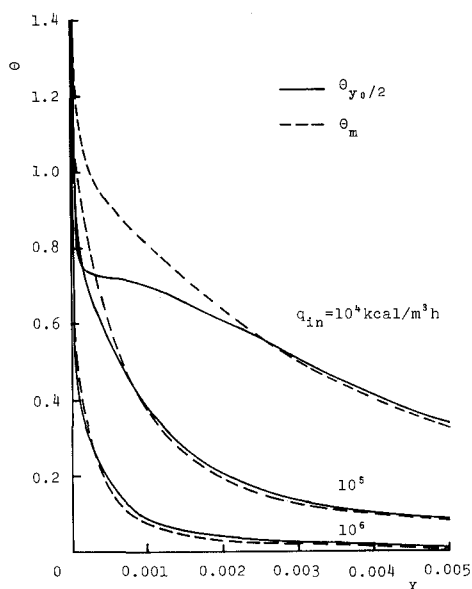


図 16 流路中央部および混合平均温度 ($\tau_0=1.0$)

a) 温度分布 内部発熱量 q_{in} が増加するにつれ、相対的に対流熱伝達の寄与が少なくなり、温度分布は y 方向に平坦化の傾向を示し、また、流体温度が高くなるため、放射熱伝達量が多くなり、流体の無次元温度 Θ は低くなる。内部発熱量が低いと加熱開始点以前

の影響を対流熱伝達により強く受けることがわかる。この結果から、作動流体の温度の均一化には内部発熱量を増すことが有効な手段となる。

b) 熱伝達 内部発熱量が増加すると Nux 分布は平坦化し、逆に、少ないとその変化は急となる。この結果から、内部発熱量の少ない場合の解析では、とくに現象を正確に把握した共存熱伝達の解析が必要となるものと考えられる。

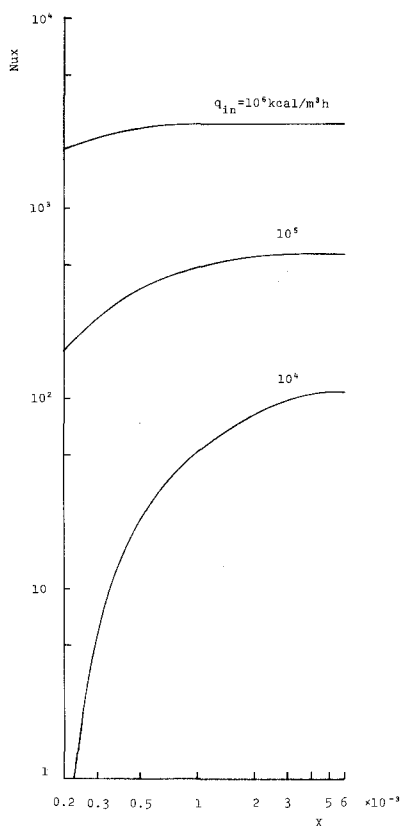


図 17 局所ヌッセル数 ($\tau_0=1.0$)

5. 結 言

本報では、放射熱伝達の数値解析に Monte Carlo 法を用い、同一の光学的寸法、形状をもって演算領域を分割する伝熱系に適用する場合、従来数値解析上の困難な問題とされた特異点の問題を解消し、確率計算個有の誤差を減じ得、また、その利用が容易である一つの方法を提示した。また、平行平板間流路を内部発熱を伴う放射性流体が流動する場合の熱伝達の解析を行ない、つぎの熱伝達特性を明らかとした。

1) 内部発熱量が一定の場合、放射吸収係数が大きくなるにつれ流体温度は全体的に低くな

り、流れに直角方向の温度分布は平坦化する。また、放射熱伝達の寄与が少ない場合（放射吸収係数が小さい場合）には、流路中央部で加熱開始前の影響を受け温度の低下がみられる。

- 2) 内部発熱量が一定の場合、放射熱伝達の考慮の有無により局所ヌッセルト数 Nux の分布は傾向を異にし、二平面の光学距離（放射吸収係数）が大きくなるにつれ、本計算範囲内では、ほぼ同一の Nux の値を示す。
- 3) 放射吸収係数が一定の場合、内部発熱量が増加するにつれ、対流熱伝達の寄与は少なくなり、 y 方向の温度分布は平坦化の傾向を示すとともに、流体は高温化し放射熱伝達量が増加する。
- 4) 放射吸収係数が一定の場合、内部発熱量が増加すると Nux の分布は平坦化する。

以上、放射熱伝達の計算における Monte Carlo 法の有効な利用方法と解析例を示し、放射熱伝達の考慮を払い、熱伝達系を解析することにより、現象の理解が容易となり、得ることのできる情報の多いことを示した。

終わりに、本研究報告のご指導をいただいた豊橋科学技術大学 斉藤武教授、北海道大学 谷口博助教授および数値解析の労を借しきれなかった本学卒業生 山崎裕啓氏に深く謝意を表す次第である。

(昭和53年5月20日受理)

文 献

- 1) たとえば、黒崎晏夫：日本機械学会論文集，**36**—290（昭45—10），1719.
- 2) Howell, J. R. and Strle, M. K. : NASA TR R-220, (1965).
- 3) 谷口博，媚山政良：機械の研究，**25**—5（昭48—5），17.
- 4) 媚山政良，谷口博，斉藤武：第12回日本伝熱シンポジウム講演論文集，（昭50—5），489.
- 5) Einstein, T. H. : NASA TR R-154, (1965).

付録1 放射を考慮したときの基礎方程式

1.1 連続の方程式、質量の保存式は次式により与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = \beta \quad (1.1)$$

ここで、 \mathbf{q} は流体の速度ベクトル、 ρ は密度、 t は時間である。 β は放射による原子核の質量変化を示し、一般に小さな値であり省略される。したがって、連続の方程式は放射の有無にかかわらず同一の式となる。

1.2 運動の方程式 運動量の保存式は次式により与えられる。

$$\rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \mathbf{F} - \nabla(P + P_R) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_R \quad (1.2)$$

ここで、 $D/Dt = (\partial/\partial t) + \mathbf{q} \cdot \nabla$ である。 \mathbf{F} は体積力、 P は流体力学的圧力、 $\boldsymbol{\tau}_s$ は粘性力によって生ずる応力テンソルである。また、 P_R は放射による圧力、 $\boldsymbol{\tau}_R$ は放射によって生ずる応力テンソルであり、おのおの次式により示され、 P 、 $\boldsymbol{\tau}_s$ に比較し、一般に小さな値であり、省略が可能である。

$$P_R = \frac{1}{3c} \int I d\omega \quad (1.3)$$

$$\tau_{Rij} = -\frac{1}{c} \int I \mu_i \mu_j d\omega \quad (\text{ただし、} i \neq j \text{ のとき } \tau_{Rij} = 0) \quad (1.4)$$

ここで、 c は真空中の光速、 I は放射強さ、 $d\omega$ は立体角、 μ_i は i 軸に対する方向余弦である。なお、体積力 \mathbf{F} のうち

放射が電磁波であるため電磁力による体積力が生ずるが、これは流体が電離気体などでない場合にはほとんど考慮を要しない程小さな値である。したがって、運動方程式には放射による項が表われてこない。

1.3 エネルギー方程式 エネルギーの保存式は次式により与えられる。

$$\rho \frac{De_m}{Dt} = \nabla \cdot [(P + P_R) \mathbf{q}] + \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_s) + \nabla \cdot (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_R) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot \mathbf{q}_R + Q \quad (1.5)$$

ここで、 e_m は単位体積当りの全エネルギーで次式により示される。また、 λ は熱伝導率、 \mathbf{q}_R は放射の熱流束、 T は温度、 Q は内部発熱量である。

$$e_m = U_m + \frac{1}{2} q^2 + \phi + U_R \quad (1.6)$$

ここで、 U_m は内部エネルギー、 $\frac{1}{2} q^2$ は運動エネルギー、 ϕ はポテンシャルエネルギーである。また、 U_R は放射エネルギー密度であり、次式により示され、内部エネルギーに比較し小さな値である。

$$U_R = \frac{4}{c} \sigma T^4 / \rho \quad (1.7)$$

したがって、1.2におけると同様に各項の大きさを比較すると、放射を考慮しない場合に対し、右辺第5項、すなわち放射熱流束の発散を追加することにより放射を考慮した場合のエネルギー方程式が得られる。

付録2 放射熱伝達の数値解析に対する確率計算法の適用

放射熱伝達現象の諸頻度分布 (frequency distribution) を確率密度数 (probability density function) へ正規化 (normalize) し、確率計算に用いる累積分布関数 (cumulative distribution function) を得る。

2.1 放射束吸収距離 放射線の減衰を考える。

i) 頻度分布 $f(\tau)$ $\tau = \int_0^l \kappa dl$ とし、 $\tau=0$ より射出された放射線が $\tau = \tau_0$ に到達するときの強さはビアの定理から $e^{-\tau_0}$ となり、 $\Delta \tau_0$ の領域で吸収されるエネルギー量は $e^{-\tau_0} \Delta \tau_0$ となる。したがって、放射線 (束) が光学距離 τ において吸収される頻度分布 $f(\tau)$ はつぎとなる。

$$f(\tau_0) \Delta \tau_0 = e^{-\tau_0} \Delta \tau_0 \text{ i.e., } f(\tau) = e^{-\tau} \quad (2.1)$$

ii) 確率密度関数 $P(\tau)$ $f(\tau)$ に正規化を施し、 $P(\tau)$ を得る。

$$P(\tau) = f(\tau) / \int_0^\infty f(\tau) d\tau = e^{-\tau} \quad (2.2)$$

iii) 累積分布関数 $R(\tau)$ 次式により求める $R(\tau)$ が $0 \leq R < 1$ の一様乱数に対応する。

$$R(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} P(\tau) d\tau = 1 - e^{-\tau_0} \text{ i.e., } R(\tau) = 1 - e^{-\tau} \quad (2.3)$$

2.2 放射束射出方向 (ガス) 射出方向の等方性を仮定する。

(A) 天頂角 (η) 方向 天頂角 η_0 方向にある面積 (立体角) $2\pi \sin \eta_0 d\eta_0$ について考える。

i) 頻度分布 $f(\eta)$

$$f(\eta_0) d\eta_0 = 2\pi \sin \eta_0 d\eta_0 \text{ i.e., } f(\eta) = 2\pi \sin \eta \quad (2.4)$$

ii) 確率密度関数 $P(\eta)$

$$P(\eta) = f(\eta) / \int_0^\pi f(\eta) d\eta = \sin \eta / 2 \quad (2.5)$$

iii) 累積分布関数 $R(\eta)$

$$R(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} P(\eta) d\eta = (1 - \cos \eta_0) / 2 \text{ i.e., } R(\eta) = (1 - \cos \eta) / 2 \quad (2.6)$$

(B) 方位角 (ζ) 方向

i) 頻度分布 $f(\zeta)$

$$f(\zeta_0) d\zeta_0 = d\zeta_0 \text{ i.e., } f(\zeta) = 1 \quad (2.7)$$

ii) 確率密度関数 $P(\zeta)$

$$P(\zeta) = f(\zeta) / \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\zeta = 1/2\pi \quad (2.8)$$

iii) 累積分布関数 $R(\zeta)$

$$R(\zeta_0) = \int_0^{\zeta_0} P(\zeta) d\zeta = \zeta_0 / 2\pi \text{ i.e., } R(\zeta) = \zeta / 2\pi \quad (2.9)$$

2.3 放射束射出方向 (壁面) 乱射出面を仮定する。

(A) 天頂角 (η) 方向 立体角に対しランペルトの余弦法則を適用する。

i) 頻度分布 $f(\eta)$

$$f(\eta_0) d\eta = 2\pi \sin \eta_0 \cos \eta_0 d\eta_0 \text{ i.e., } f(\eta) = 2\pi \sin \eta \cos \eta \quad (2.10)$$

ii) 確率密度関数 $P(\eta)$

$$P(\eta) = f(\eta) / \int_0^{\pi/2} f(\eta) d\eta = 2 \sin \eta \cos \eta \quad (2.11)$$

iii) 累積分布関数 $R(\eta)$

$$R(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} P(\eta) d\eta = \sin^2 \eta_0 \quad i.e., \quad R(\eta) = \sin^2 \eta \quad (2.12)$$

(B) 方位角(ζ)方向

ガスの方角角方向と同一。

付録3 Monte Carlo 法の放射熱伝達への適用方法

N法, DPE法を導入するにあたり, 数式の取扱いを容易にするため, 次式以降に示す置換えを行なう。

$$\left. \begin{aligned} B_{go} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial y^2} \right) - \gamma u c_p \frac{\partial T_g}{\partial x} + q_{in} \\ B_{wo} &= -\lambda \left(\frac{\partial T_g}{\partial x} \right)_{y=0} - q_{x1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{gg} &= \kappa \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} dz \right\} & P_{wg} &= \kappa \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{\pi l} \cos \phi dz \right\} \\ P_{gw} &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{4\pi l^2} \cos \phi dz \right\} & P_{ww} &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa l}}{\pi l^2} \cos^2 \phi dz \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式(3.1), (3.2)を用いると本文式(2)および式(3)はつぎのように書くことができる。

$$4\kappa E_{go} = \int_A 4\kappa E_g P_{gg} dA + \int_L E_w P_{wg} dx + B_{go} \quad (3.3)$$

$$E_{wo} = \int_A 4\kappa E_g P_{gw} dA + \int_L E_w P_{ww} dx + B_{go} \quad (3.4)$$

ただし, A は流体に対する積分領域, L は壁面1および2を含めた壁面に対する積分領域を示す。

3.1 N法(放射エネルギー比例した放射束数を用いる方法)

放射熱伝達に対する熱平衡が成立し, 系が放射能 $E (= \sigma T^4)$ に関し線型であるときには, 数値解析上再放射の手続きを用いた Monte Carlo法(従前広く用いられた方法)を用いることができ, この方法は反復計算を必要としない。しかし, 対流との共存熱伝達では放射熱伝達に対する上述の条件が成立しない。したがって, 式(3.3), (3.4)の解を反復計算により得ることとする。この場合, 放射熱伝達の計算に用いる Monte Carlo法では要素の放射エネルギーに比例した放射束数を確率的に追跡するが, 再放射の手続きをとらないこととする。この考えとも導入したのがN法(Normal method)である。

第0近似として T_g^0, T_w^0 を与えると $4\kappa E_g^0, E_w^0$ および式(3.1)から B_{go}^0, B_{wo}^0 が求められる。また, 式(3.2)から P^1 を求め, 順次反復計算を行ない, 第n近似解を次式から求める。

$$4\kappa E_{go}^n = \int_A 4\kappa E_g^{n-1} P_{gg}^n dA + \int_L E_w^{n-1} P_{wg}^n dx + B_{go}^{n-1} \quad (ただし \quad n \geq 1) \quad (3.5)$$

$$E_{wo}^n = \int_A 4\kappa E_g^{n-1} P_{gw}^n dA + \int_L E_w^{n-1} P_{ww}^n dx + B_{wo}^{n-1} \quad (3.6)$$

放射束の強さ S は各反復ごと一定とし, 次式で与える。ただし, N_i は全放射束数である。

$$S^n = \{ \int_L E_w dx + \int_A 4\kappa E_g dA \} / N_i \quad (3.7)$$

このとき, 着目する要素から射出される放射束数 N_{go}^n, N_{wo}^n は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_{go}^n &= 4\kappa E_{go}^{n-1} dA / S^n \\ N_{wo}^n &= E_{wo}^{n-1} dx / S^n \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

3.2 DPE法(反復計算途中の放射エネルギー差に比例した放射束数を用いる方法)

流体および壁面の放射受熱量を次式のようにCとおく。

$$\left. \begin{aligned} C_{go} &= \int_A 4\kappa E_g P_{gg} dA + \int_L E_w P_{wg} dx \\ C_{wo} &= \int_A 4\kappa E_g P_{gw} dA + \int_L E_w P_{ww} dx \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

また, 放射エネルギー差 $\Delta E_g^{n-1}, \Delta E_w^{n-1}$ を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_g^{n-1} &= 4\kappa E_g^{n-1} - 4\kappa E_g^{n-2} \\ \Delta E_w^{n-1} &= E_w^{n-1} - E_w^{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

N法における E_g^{n-1}, E_w^{n-1} の代りに $\Delta E_g^{n-1}, \Delta E_w^{n-1}$ を用いるのがDPE法(Differential Emissive Power Emission method)である。n=1では, 式(3.10)の ΔE^{n-1} を与えることができないので, 任意に与えた第0近似からN法によりつぎの C_0^1 を得る。

$$C_{go}^1 = \int_A 4\kappa E_g^0 P_{gg}^1 dA + \int_L E_w^0 P_{wg}^1 dx$$

$$C_{wo}^1 = \int_A 4\kappa E_g^0 P_{gw}^1 dA + \int_L E_w^0 P_{ww}^1 dx$$

n=2以降では ΔE を用い演算を行ない C_0^n をつぎのように求め, 第n近似解を式(3.12), (3.13)より得る。

$$C_{go}^n = C_{go}^{n-1} + \int_A \Delta E_g^{n-1} P_{gg}^n dA + \int_L \Delta E_w^{n-1} P_{wg}^n dx \quad (3.11a)$$

$$C_{wo}^n = C_{wo}^{n-1} + \int_A \Delta E_g^{n-1} P_{gw}^n dA + \int_L \Delta E_w^{n-1} P_{ww}^n dx \quad (3.11b)$$

$$4\kappa E_{go}^n = C_{go}^n + B_{go}^{n-1} \quad (3.12)$$

$$E_{wo}^n = C_{wo}^n + B_{wo}^{n-1} \quad (3.13)$$

ここで、DPE法とN法の等価性を検討する。式(3.11a)の C_{go}^n に着目すると、 C_{go}^n はつぎのように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} C_{go}^n &= \int_A \Delta E_g^{n-1} P_{gg}^n dA + \int_L \Delta E_w^{n-1} P_{wg}^n dx + \int_A \Delta E_g^{n-2} P_{gg}^{n-1} dA + \int_L \Delta E_w^{n-2} P_{wg}^{n-1} dx + \dots \\ &\quad + \int_A \Delta E_g^1 P_{gg}^2 dA + \int_L \Delta E_w^1 P_{wg}^2 dx + \int_A 4\kappa E_g^0 P_{gg}^1 dA + \int_L E_w^0 P_{wg}^1 dx \\ &= \int_A 4\kappa [E_g^{n-1} P_{gg}^n - E_g^{n-2} P_{gg}^n + E_g^{n-2} P_{gg}^{n-1} - E_g^{n-3} P_{gg}^{n-1} + \dots + E_g^1 P_{gg}^2 - E_g^0 P_{gg}^2 + E_g^0 P_{gg}^1] dA \\ &\quad + \int_L [E_w^{n-1} P_{wg}^n - E_w^{n-2} P_{wg}^n + E_w^{n-2} P_{wg}^{n-1} - E_w^{n-3} P_{wg}^{n-1} + \dots + E_w^1 P_{wg}^2 - E_w^0 P_{wg}^2 + E_w^0 P_{wg}^1] dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、放射束数が確率として信頼しうる程多く、また、つぎの関係が成立するとき、式(3.14)は式

$$P^n = P^{n-1} = \dots = P^2 = P^1 \quad (3.15)$$

(3.16) となる。

$$C_{go}^n = \int_A 4\kappa E_g^{n-1} P_{gg}^n dA + \int_L E_w^{n-1} P_{wg}^n dx \quad (3.16)$$

これを式(3.12)に代入すると次式を得、N法で用いる式(3.5)と同一となる。

$$4\kappa E_{go}^n = C_{go}^n + B_{go}^{n-1} = \int_A 4\kappa E_g^{n-1} P_{gg}^n dA + \int_L E_w^{n-1} P_{wg}^n dx + B_{go}^{n-1} \quad (3.17)$$

また、同様に、式(3.13)は式(3.15)の条件下で式(3.6)と同一となることが証明される。なお、DPE法はN法が放射エネルギーの絶対値に比例した放射束数を確率的に追跡するのに対し、相続く反復回の放射エネルギーの差に比例した放射束数を追跡するに過ぎず、解が収束するにつれ放射エネルギーの差は僅少となるため演算時間の短縮は顕著であり、それに伴い計算精度は改善される。

DPE法では、放射束の強さ S を次式により与える。

$$\left. \begin{aligned} S^1 &= \{ \int_L E_w dx + \int_A 4\kappa E_g dA \} / N_1 \quad (\text{ただし, } n=1) \\ S^n &= S^{n-1} / Cfs \quad (\text{ただし, } n \geq 2, Cfs \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

すなわち、反復計算が進むにつれて、係数 Cfs により S^n を小さくし、精度を高めることができる。このとき、要素から射出される放射束数 N_0^n は次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_{go}^n &= | \Delta E_{go}^{n-1} | dA / S^n = 4\kappa | E_g^{n-1} - E_g^{n-2} | dA / S^n \\ N_{wo}^n &= | \Delta E_{wo}^{n-1} | dx / S^n = | E_w^{n-1} - E_w^{n-2} | dx / S^n \end{aligned} \right\} \quad (\text{ただし, } n \geq 2) \quad (3.19)$$

なお、 $n=1$ における N_0^n は式(3.8)によるものとする。

3.3 EBN法(流体の温度場の計算の後、壁面の熱負荷を求める方法)

流体を取り囲む温度に関する境界条件が設定値の場合、壁面の熱負荷の計算は、流体の温度分布を決定した後に行なうことができる。

着目する微小要素 $P(x, y)$ に与えられる放射束数を式(3.8)ないしは式(3.19)より算出し $N(x, y)$ とする。 $0 \leq \tau \leq \tau_{max}$ の範囲で吸収される放射束の数を $N_{eff}(x, y)$ とすると、 $N_{eff}(x, y)$ は次式により求められる。

$$N_{eff}(x, y) = \frac{\int_0^{\tau_{max}} e^{-\tau} d\tau}{\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau} \times N(x, y) = (1 - e^{-\tau_{max}}) \times N(x, y) \quad (3.20)$$

τ_{max} は放射束の指向性を考慮して、着目する点 $P(x, y)$ から温度に対する境界条件が位置する場所までの光学距離の最大値を与えれば良い。ここで、 N_{eff} を実効放射束数とよび、本法をEBN法(Effective Bundle Number method)とよぶ。

このとき、放射束の射出方向および放射束の追跡方法はN法、DPE法と同じであるが、放射束の吸収光学距離 τ はつぎのように求める。すなわち、累積分布関数 R_t は次式となり、この式より τ を求めると式(3.22)を得る。

$$R_t = \int_0^{\tau} e^{-\tau'} d\tau' / \int_0^{\tau_{max}} e^{-\tau'} d\tau' = (1 - e^{-\tau}) / (1 - e^{-\tau_{max}}) \quad (3.21)$$

$$\tau = -\log e \{ 1 - (1 - e^{-\tau_{max}}) \times R_t \} \quad (3.22)$$

本法はN法およびDPE法などと併用することができ、DPE法を適用できる伝熱系の解析にEBN法を併用すると、たとえば小型の火炉の熱伝達の数値解析においては放射熱伝達に要する演算時間をN法に比較し1/200程度以上にまで減少することが可能であり、DPE法による1/50程度をさらに改善できる。すなわち、放射熱伝達の考慮を必要とする伝熱系の解析では、DPE法およびEBN法が適応できる系に近似を行なうと、もはや従前の

Monte Carlo法は長い演算時間を必要するといった危惧は無くなったものと考えることができる。さらに、従来光学距離の短い伝熱系の解析に対するMonte Carlo法の適応は困難であったが、EBN法により、その一部は解決され、Monte Carloの適応範囲が広まったものと考えられる。